حالة خاصة 2:

لتكن لدينا المعادلة تفاضلية : $y''+p(x).y'+q(x).y=0$ (1)

وليكن y_1 حل خاص لهذه المعادلة (1).

عندئذٍ يجب أن تكون

(2) $y_1''+p(x).y_1'+q(x).y_1=0$

لنضرب الأولى بـ y_1 ولنضرب الثانية بـ y

نحصل على:

(1)' $y_1.y''+p(x).y_1.y'+q(x).y_1.y=0$

(2)' $y.y_1''+p(x).y.y_1'+q(x).y\,y_1=0$

بطرح 2' من 1' نجد أن

(3) $y_1.y''-y.y_1''+p(x)(y_1.y'-y\,y_1')=0$

لنحسب الآن قيمة محدد فرونسكي للدالتين y , y_1 $-\frac{dw}{dx}$

(4) $w(y,y_1)=\begin{vmatrix} y & y_1 \\ y' & y_1' \end{vmatrix}=y\,y_1'-y_1.y'$

لنشتق طرفي هذه المعادلة بالنسبة لـ x فنجد أن:

$\frac{dw}{dx}=y'y_1'+y.y_1''-y_1'y'-y_1.y''$

(5) $\Rightarrow \frac{dw}{dx}=y.y_1''-y_1.y''$

لنعوض (4) و (5) في (3) نجد أن:

(−x) $-\frac{dw}{dx}-p(x)\,W=0$

$\frac{dw}{dx}+p(x)\,W=0$

معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى خطية المتغير التابع فيها W، خطية متجانسة نعاملها معاملة المتحولات المنفصلة:

$W'=-p(x).W\Rightarrow$

SUBJECT: / /

$$\Rightarrow \frac{W'}{W} = -P(x)$$

بالمكاملة نجد أنه :

$$\ln \frac{W}{c_1} = -\int P(x)\,dx$$

ومنه فإن :

$$W = c_1 \cdot e^{-\int P(x)\,dx}$$

لكن

$$y y_1' - y_1 \cdot y' = c_1 \cdot e^{-\int P(x)\,dx} \quad -\times$$

$$y_1 \cdot y' - y \cdot y_1' = c_0\, e^{-\int P(x)\,dx} \; ; \; c_0 = -c_1$$

نقسم طرفي المساواة على y_1^2

$$\frac{y_1 \cdot y' - y \cdot y_1'}{y_1^2} = c_0 \cdot \frac{e^{-\int P(x)\,dx}}{y_1^2}$$

وبما أن

$$\frac{d}{d(x)}\left(\frac{y}{y_1}\right) = \frac{y_1 \cdot y' - y \cdot y_1'}{y_1^2}$$

إذاً نجد أن

$$\frac{d}{d(x)} \cdot \left(\frac{y}{y_1}\right) = \frac{c_0 \cdot e^{-\int P(x)\,dx}}{y_1^2}$$

بالمكاملة نجد أن :

$$\frac{y}{y_1} = \int \frac{c_0 \cdot e^{-\int P(x)\,dx}}{y_1^2} + c_2$$

ومنه فإن الحل العام للمعادلة 1 يعطى بالعلاقة :

$$y_h = y_1 \left[\int \frac{c_0 \cdot e^{-\int P(x)\,dx}}{y_1^2}\,dx + c_1 \right]$$

وهذه العلاقة تعرف بعلاقة ليوفيل ارستوغراد سكي .

★ بهذا الشكل أصبح لدينا ثلاثة طرق لإيجاد الحل العام لمعادلة تفاضلية خطية من رتبة الثانية علم لها حل خاص واحد وهو y_1 .

ملاحظة 2: باستخدام علاقة ليوفيل استروغرادسكي يجب أن يكون معامل أكبر مشتقة يساوي الواحد.

مثال توضيحي: أوجد الحل العام للمعادلة: $x^2 y'' - 2y = 0$ إذا علمت أن $y_1 = x^2$ حل خاص وذلك وفق طريقة ليوفيل.

الحل: الحل العام وفق علاقة ليوفيل يعطى بالعلاقة:

$$y = y_1 \left[\int \frac{c_1 \cdot e^{-\int p(x)\,dx}}{y_1^2} dx + c_2 \right]$$; c_1, c_2 ثوابت كيفية

$$y'' - \frac{2}{x^2} \cdot y = 0$$

$$p(x) = 0$$

$$y = x^2 \left[\int \frac{c_1 \cdot e^{-\int 0\,dx}}{x^4} dx + c_2 \right]$$

$$y = x^2 \left[\int \frac{c_0}{x^4} dx + c_2 \right] \quad ; \quad c_0 = c_1 \cdot e^{x}$$

$x^2 \quad x$

$$y = x^2 \left[c_0 \frac{1}{-3x^3} + c_2 \right]$$

$$\boxed{y = c_3 \frac{1}{x} + c_0 x^2} \quad , \quad c_3 = \frac{c_0}{-3}$$

-2- أوجد الحل العام للمعادلة: $y'' + y' + e^{-2x} \cdot y = 0$ إذا علمت أن $y_1 = \cos(e^{-x})$ حل خاص وذلك وفق طريقة ليوفيل.

الحل: الحل العام وفق علاقة ليوفيل:

$$y = y_1 \left[\int \frac{c_1 \cdot e^{-\int p(x)\,dx}}{y_1^2} dx + c_2 \right]$$

$$y = \cos e^{-x} \left[\int \frac{c_1 \cdot e^{-\int dx}}{(\cos e^{-x})^2} dx + c_2 \right]$$

SUBJECT:

$$y = \cos . e^{-x}\left[\int \frac{c_1 . e^{-x}}{\cos^2(e^{-x})}dx + c_2\right]$$

نفرض $e^{-x} = t \Leftarrow -e^{-x}dx = dt$

$$y = \cos e^{-x}\left[c_1 \int \frac{-dt}{\cos^2 t} + c_2\right]$$

$$y_h = \cos e^{-x}\left[-c_1 \cdot \tan e^{-x} + c_2\right]$$

$$y_h = \cos e^{-x}\left[c_0 . \frac{\sin e^{-x}}{\cos e^{-x}} + c_2\right] \quad ; \quad c_0 = -c_1$$

$$y_h = c_0 . \sin e^{-x} + c_2 . \cos e^{-x} \quad ; \quad c_0 = -c_1$$

قاعدة الحلول هي:

$y_1 = \cos e^{-x}$ $\qquad$ $y_2 = \sin . e^{-x}$

المعادلة التفاضلية الخطية (من الرتبة) غير متجانسة:

الشكل العام لها كما نعلم هو

$L(y) = f(x)$ $\qquad$ [1]

حيث L مؤثر تفاضلي خطي من الرتبة n

المعادلة $L(y) = 0$ $\qquad$ [2]

تدعى هي معادلة التفاضلية الخطية المتجانسة المناظرة للمعادلة [1] و لنفرض أن y_h الحل العام للمعادلة [2]

ولنفرض أن y_p هو حل خاص للمعادلة [1] عندئذ سنبين أن الحل العام للمعادلة [1] ~~[illegible]~~ ما هو إلا الحل العام للمعادلة المتجانسة المناظرة مضافاً إليه حل خاص للمعادلة التفاضلية الخطية غير متجانسة أي أن الحل العام للمعادلة [1] يعطى بالعلاقة: $y = y_h + y_p$.

مبرهنة: إن الحل العام للمعادلة $L(y)=f(x)$ ما هو إلا الحل العام المتجانسة المناظرة مضافاً إليه حل خاص للمعادلة الخطية غير متجانسة.

الحل: لنفرض أن y_h هو الحل العام للمعادلة $L(y)=0$ أي أن $L(y_h)=0$

ولنفرض أن y_p هو الحل الخاص للمعادلة $L(y)=f(x)$ أي أن $L(y_p)=f(x)$

ولنثبت أن $y=y_h+y_p$ هو الحل العام للمعادلة $L(y)=f(x)$
أي لنثبت أن $L(y_h+y_p)=f(x)$

$$L(y_h+y_p)=L(y_h)+L(y_p)=0+f(x)=f(x)$$

نستنتج من هذه المساواة أن $y=y_h+y_p$ حل للمعادلة $L(y)=f(x)$ وهو بالوقت نفسه حل عام لأنه يحتوي على عدد من الثوابت الكيفية يساوي رتبة المعادلة تفاضلية وهذه الثوابت موجودة ضمن y_h.

ملاحظة 1: إذا كان لدينا المعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة n غير متجانسة الآتية:

$$L(y)=f_1(x)+f_2(x)+\cdots+f_k(x) \quad (\star)$$

وكان y_{p_1} حل خاص للمعادلة $L(y)=f_1(x)$

y_{p_2} " " " $L(y)=f_2(x)$

⋮

y_{p_k} " " " $L(y)=f_k(x)$

عندئذ تكون الدالة $y_p=y_{p_1}+y_{p_2}+\cdots+y_{p_k}$ حل خاص للمعادلة المعطاة $(\star)$.

مثال: لتكن لدينا المعادلة: $y''-y=3e^{2x}-2\cos x$
المعادلة هذه طرفها الأيمن يتكون من مجموع دالتين الأولى $f_1(x)=3e^{2x}$
$f_2(x)=-2\cos x$

إن الدالة $y_{p_1} = e^{2x}$ هي حل خاص للمعادلة $y'' - y = 3e^{2x}$

كما أن الدالة $y_{p_2} = \cos x$ هي حل خاص للمعادلة $y'' - y = -2\cos x$

[illegible] فإن الدالة $y_p = y_{p_1} + y_{p_2} = e^{2x} + \cos x$ هي حل خاص للمعادلة المعطاة.

ملاحظة 2: إذا كان لدينا معادلة تفاضلية من الشكل:

$$y'' + p(x) \cdot y' + q(x) \cdot y = f(x)$$

وإذا كانت y_{p_1} و y_{p_2} حلين خاصين لهذه المعادلة

هذا يعني $y''_{p_1} + p(x) \cdot y'_{p_1} + q(x) \cdot y_{p_1} = f(x)$

وكذلك يكون $y''_{p_2} + p(x) \cdot y'_{p_2} + q(x) \cdot y_{p_2} = f(x)$

عندئذٍ تكون الدالة $y_{p_2} - y_{p_1}$ هو حل خاص للمعادلة $y'' + p(x) \cdot y' + q(x) \cdot y = 0$

★ هذه الملاحظة تعني لنا أن الفرق بين أي حلين خاصين للمعادلة $L(y) = f(x)$ هو حل خاص للمعادلة $L(y) = 0$.

ملاحظة 3: إذا كان لدينا معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الثانية غير متجانسة أي من الشكل $y'' + p(x) \cdot y' + q(x) \cdot y = f(x)$ وكان y_{p_1} ، y_{p_2} حلين خاصين لهذه المعادلة عندئذٍ الحل العام يعطى بالعلاقة:

$$y = (y_{p_2} - y_{p_1})c + y_{p_1}$$

$$y_h \quad + \quad y_p$$

مثال توضيحي: أوجد الحل العام للمعادلة: $(1 + x^2)y'' + xy' - y = 1$

إذا علمنا أن المعادلة المعطاة $y_1 = x - 1$; $y_2 = -1$ حلين خاصين

الحل: الحل العام يعطى بالصيغة

$$y = (y_{p_1} - y_{p_2})\, v + y_{p_1}$$

$$y = (x - 1 + 1)\, v + (x - 1)$$

$$y = x\,v + (x - 1)$$

نشتق عدد من المرات بما وفق رتبة المعادلة

نشتق مرتين:

$$y' = v + x.v' + 1$$

$$y'' = 2v' + x.v''$$

نعوض في المعادلة ~~التفاضلية~~ المعطاة فنجد أن

$$(1+x^2)\{x.v'' + 2(1+x^2)v' + x\,v + x^2.v' + x - x\,v - x + 1 = x$$

بالإصلاح نجد أن:

$$(1+x^2)\, x.v'' + (3x^2+2)\, v' = 0$$

نفرض $v' = u \Leftarrow v'' = u'$ أي أن

$$x(1+x^2)\, u' + (3x^2+2)\, u = 0$$

معادلة تفاضلية خطية متجانسة من الرتبة الأولى؛ نفصل متحولاتها

$$\frac{u'}{u} = -\frac{3x^2+2}{x(1+x^2)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + c}{1+x^2}$$

$1+x^2 \quad x \qquad\qquad x\,x$

$$3x^2 + 2 = (1+x^2)A + Bx^2 + cx$$

$$3x^2 + 2 = 1A + x^2 A + Bx^2 + cx$$

بالمطابقة نجد أن

$$A + B = 3 \quad ; \quad c = 0 \quad ; \quad A = 2$$

$$B = 1$$

$$\frac{u'}{u} = -\left[\frac{2}{x} + \frac{x}{1+x^2}\right] \overset{\int}{\Rightarrow} \ln\frac{u}{c} = -2\ln x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$$

$$\ln\frac{u}{c_1} = \ln\frac{1}{x^2.\sqrt{x^2+1}} \Rightarrow u = \frac{c_1}{x^2.\sqrt{x^2+1}}$$

SUBJECT:

$$u' = \frac{c_1}{x^2\sqrt{x^2+1}} \overset{\int}{\Longrightarrow} u = c_1 \int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+1}} + c_2$$

بفرض أن $x = sh\,t$ نشتق $dx = ch\,t\,dt$

$$u = c_1 \int \frac{ch\,t\,dt}{sh^2 t \cdot ch\,t} + c_2 \Rightarrow u = c_1 \int \frac{dt}{sh^2 t} + c_2$$

$$u = c_1 \cdot \coth t + c_2$$

$$u = c_1 \cdot \frac{ch\,t}{sh\,t} + c_2 = c_1 \cdot \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} + c_2$$

ومنه فإن الحل العام للمعادلة المعطاة هو :

$$y = x\left[c_1 \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} + c_2\right] + x - 1$$

$$y = c_1\sqrt{x^2+1} + x c_2 + x - 1$$

$$y = c_1\sqrt{x^2+1} + (\underbrace{c_2+1}_{c_3})x - 1$$

---

* **مبرهنة (بدون برهان) :**

إذا كانت لدينا المعادلة التفاضلية $L(y) = f(x)$
وكانت الدوال $\{y_j\}_{j=1}^{n}$ هي قاعدة الحلول للمعادلة $L(y) = 0$ عندئذٍ الحل الخاص للمعادلة $\boxed{1}$ يعطى بالعلاقة :

$$y_p = y_1 \int \frac{w_1}{w}dx + y_2 \int \frac{w_2}{w}dx + \dots + y_n \int \frac{w_n}{w}dx$$ ؛ w محدد فرونسكي لقاعدة الحلول

$w_j \;; (j = 1, \dots, n)$ هي المحدد التي نحصل عليها من محدد فرونسكي باستبدال عناصر العمود ذو الدليل j بالعناصر $0, 0, \dots, F(x)$.

أمثلة : لتكن لدينا معادلة تفاضلية : $y'' - y = 3e^{2x}$
ولنفرض بأننا نعلم قاعدة الحلول لهذه المعادلة ولتكن $y_1 = e^{x} \;;\; y_2 = e^{-x}$

أوجد الحل الخاص؟

$$y_p = y_1 \int \frac{w_1}{w}\,dx + y_2 \int \frac{w_2}{w}\,dx$$

$$w(e^{x}, e^{-x}) = \begin{vmatrix} e^{x} & e^{-x} \\ e^{x} & -e^{-x} \end{vmatrix} = -1-1 = -2 \neq 0$$

$$w_1 = \begin{vmatrix} 0 & e^{-x} \\ 3e^{2x} & -e^{-x} \end{vmatrix} = -3e^{x}$$

$$w_2 = \begin{vmatrix} e^{x} & 0 \\ e^{x} & 3e^{2x} \end{vmatrix} = 3e^{3x}$$

نعوض في العلاقة:

$$y_p = e^{+x}\int \frac{-3e^{x}}{-2}\,dx + e^{-x}\int \frac{3e^{3x}}{-2}\,dx$$

$$y_p = \frac{3}{2}e^{2x} - \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{3}e^{2x}$$

$$\boxed{y_p = e^{2x}}$$

ملاحظات:

من خلال ما درسنا إلى الآن نلاحظ أنه: إذا كانت لدينا المعادلة التفاضلية الخطية غير متجانسة $L(y)=F(x)$ وجدنا أن الحل العام لهذه المعادلة يعطى بالشكل $y = y_h + y_p$ حيث y_h هو الحل العام للمتجانسة المناظرة هو تركيب خطي من دوال قاعدة الحلول أما y_p فهو الحل الخاص للمعادلة التفاضلية الخطية غير متجانسة ووجدنا أن هذا الحل الخاص لتعيينه وفق المرحلة الأخيرة لا بد من تعريف قاعدة الحلول للمعادلة المتجانسة المناظرة.

ملاحظة: طريقة التي تعرفنا إيجاد الحل الخاص بالمرحلة الأخيرة تعرف بطريقة لاغرنج أو الثوابت المتغيرة.

SUBJECT:

السؤال الذي يطرح نفسه هل هناك طريقة محددة نتبعها لإيجاد قاعدة الحلول لمعادلة تفاضلية خطية معطاة؟

1- نعم

2- لا